数理解析研究所講究録
558巻 1985年 17-34

Involutory な double characteristics を持つ microdifferential equation の microlocal singularity の伝播について

東京大・理　戸瀬信之 (Nobuyuki Tose)

この小論で取り扱う microdifferential equation は次の(1)式で与えられる

(1) $P(x, D_x)u = (D_1 D_2 + R(x, D_x))u = 0$

但し，ここで $R(x, D)$ には次の仮定をおく。

(2) $\operatorname{ord} R(x, D_x) \leqq 1$

(3) $R(x, D_x) \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (0, \sqrt{-1}dx_3)}$

ここで、(1)の実の特性多様体は

(4) $\Lambda_1 = \{ (x, \sqrt{-1}\xi dx\infty) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n ;\ \xi_1 = 0 \}$

(5) $\Lambda_2 = \{ (x, \sqrt{-1} dx\infty) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n ;\ \xi_2 = 0 \}$

と定めるとき，P の特性多様体の real point は

(6) $ch(P) \cap \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$

で与えられる。さらに，

(7) $\Lambda = \{ (x, \sqrt{-1}\xi dx\infty) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n ;\ \xi_1 = \xi_2 = 0 \}$
$= \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

と定めるとき，microlocalには，Λの外ではellipticまたはsimpleである。従って，問題となるのは，Λの上でのmicro-函数解の構造である。後に精しく述べるが，方法としては，柏原－河合[1]，柏原－Y. Laurent [2]，Laurent [3]などによる第2超局所化の理論を用いる。超局所化が，base Spaceにおける方向までこめてAnalysisすると考えれば，ここでいう第2超局所化の方法とは$\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$中Λに横断的な方向までこめてAnalysisする事と言える。第2超局所的な議論を経た後に，次の超局所的な定理1を得る。

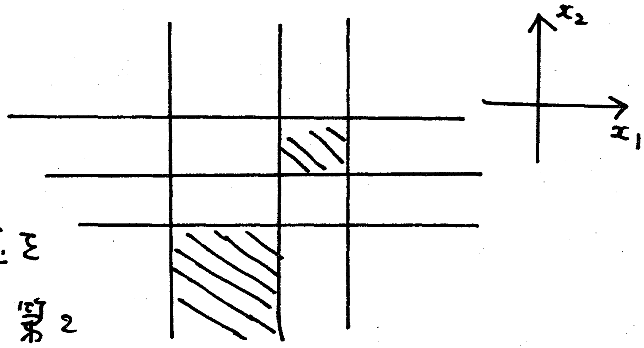
ΣをΛの陪特性帯で$\mathring{p}$を通るものとする。Σは$(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$の積分多様体であるので，

$$(8)\ \Sigma = \left\{ (x, \sqrt{-1}\xi dx\infty) \in \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n;\ \xi_1 = \xi_2 = 0,\ x' = (x_3 \cdots x_n) = 0,\ \xi' = (\xi_3 \cdots \xi_n) = (1 0 \cdots 0) \right\}$$

とx_1, x_2でparametrizeされることに注意する。

定理1 $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}|_{\Sigma}$のsectionで$\mathring{p} = (0, \sqrt{-1}dx_3\infty)$の近傍で定義された$u$が方程式(1)を満たすと仮定する。この時，$\Sigma$上の$\partial_{x_1}$の積分曲線の族$\{b^{(1)}_{t_1}\}_{t_1 \in T_1}$，及び$\Sigma$上の$\partial_{x_2}$の積分曲線の族$\{b^{(2)}_{t_2}\}_{t_2 \in T_2}$が存在して，

supp uは$\Sigma \setminus \left(\bigcup_{t_1 \in T_1} b^{(1)}_{t_1} \cup \bigcup_{t_2 \in T_2} b^{(2)}_{t_2}\right)$の連結成分のいくつか及び，$\bigcup_{t_1 \in T_1} b^{(1)}_{t_1}$及び$\bigcup_{t_2 \in T_2} b^{(2)}_{t_2}$のunionとなる。 ▨



右図に Σ上の support の図を例として示しておく。

この定理1を得る為の方途を説明する為に，次節において第2超局所化について復習する。

§1. 第2超局所化について この節においては，以下の Notation に従う。$M=\mathbb{R}^{n_0+n_1}_{(x,t)}$，$X=\mathbb{C}^{n_0}_{(z,w)}$ を M の複素化とする。$\sqrt{-1}\,T^*M$ の正則包合的部分多様体として，次の標準形をとる。

(9) $\Lambda := \{(x,t;\sqrt{-1}(\xi dx+\tau dt))\in\sqrt{-1}\,T^*M\ ;\ \xi=0\}$

さらに，Λ の複素化として

(10) $\Lambda^{\mathbb{C}} := \{(z,w,\zeta dz+\theta dw)\in T^*X\ ;\ \zeta=0\}$

をとる。

定義1 $\Lambda^{\mathbb{C}}$ の陪特性帯で Λ を通るもののunionを $\tilde{\Lambda}$ と記し，Λ の部分複素化と呼ぶ。▨

ここでは，

(11) $\tilde{\Lambda} \simeq \mathbb{C}^{n_0}_{z} \times \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^{n_1}_{(t,\sqrt{-1}\tau dt)}$

と同一視する。$\tilde{\Lambda}$ 上には，z を正則パラメーターとして持つ micro函数の層 $\mathcal{C}\mathcal{O}$ がある。以下

(12) $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}} := \mathcal{C}\mathcal{O}$

と記す。

柏原先生は $\mathcal{O}$ から $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ を構成したのと同様の手続きを以て, $\mathcal{C}_{\tilde\Lambda}$ から次に定める 2-hyperfunction $\mathcal{B}^2_\Lambda$, 2-micro函数 $\mathcal{C}^2_\Lambda$ を構成した。

$$\begin{array}{c} \widetilde{\Lambda^{\sim *}_{\Lambda}} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \pi_{\Lambda|\tilde\Lambda}} \\ \Lambda \end{array}$$

定義2 (13) $$\mathcal{B}^2_\Lambda := \mathcal{H}^{n_0}_{\Lambda}(\mathcal{C}_{\tilde\Lambda})$$

(14) $$\mathcal{C}^2_\Lambda := \mathcal{H}^{n_0}_{T^*_\Lambda\tilde\Lambda}(\pi_{\Lambda|\tilde\Lambda}^{-1}\mathcal{C}_{\tilde\Lambda})^a$$

なる層を定めて, $\mathcal{B}^2_\Lambda$ の section 及び $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の section を 2-hyperfunction, 2-micro函数と呼ぶ。但し $\pi_{\Lambda|\tilde\Lambda}$ は右上図の comonoidal 変換とする。 ▨

注意1 柏原-Y. Laurent [2] において証明されている抽象的な Edge of the wedge の定理を用いると上記の cohomology は純余次元的であることが分る。即ち,

(15) $$R\Gamma_\Lambda(\mathcal{C}_{\tilde\Lambda}) = \mathcal{B}^2_\Lambda[n_0]$$

(16) $$R\Gamma_{T^*_\Lambda\tilde\Lambda}(\pi^{-1}_{\Lambda|\tilde\Lambda}\mathcal{C}_{\tilde\Lambda}) = \mathcal{C}^2_\Lambda[n_0]$$

が成立する。

$\mathcal{C}^2_\Lambda$ に関する exact sequence として以下のものがある。

(17) $$0 \to \mathcal{C}_{\tilde\Lambda}|_\Lambda \to \mathcal{B}^2_\Lambda \longrightarrow \pi_{\Lambda *}(\mathcal{C}^2_\Lambda|_{\mathring{T}^*_\Lambda\tilde\Lambda}) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

(18) $$0 \to \mathcal{C}_M|_\Lambda \longrightarrow \mathcal{B}^2_\Lambda \quad \text{(exact).}$$

但し, π_Λ は projection $\pi_\Lambda : \mathring{T}^*_\Lambda\tilde\Lambda \longrightarrow \Lambda$. とする。

上記の $\mathscr{C}^2_\Lambda$ の理論については柏原－Y. Laurent [ ]を参照されたい。次に Y. Laurent の Thesis [ ] に従い, $\mathscr{C}^2_\Lambda$ に作用する operator を定める。

右図を可換とするように, $\Lambda^{\mathbb{C}}$ を $\Lambda^{\mathbb{C}}\times\Lambda^{\mathbb{C}}$ に埋めこむ。ここで, Realの場合と同様に, $\Lambda^{\mathbb{C}}\times\Lambda^{\mathbb{C}}$ の陪特性帯で, $\Lambda^{\mathbb{C}}$ を通るもののunionを $\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ と記す。

$$
(19)\quad
\begin{tikzcd}
\Lambda^{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & T^*X \arrow[r, "\sim"] & T^*_X(X\times X) \arrow[d, hook] \\
\Lambda^{\mathbb{C}}\times\Lambda^{\mathbb{C}} \arrow[rr, hook] & & T^*(X\times X)
\end{tikzcd}
$$

$T^*_\Lambda\widetilde{\Lambda}$ の座標として $(x, t, \sqrt{-1}\tau dt; \sqrt{-1}x^* dx)$ をとるとき, その複素化として $T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ の座標を $(z, w, \theta dw, z^* dz)$ とる。

Cannonical に local cohomology の言葉で 2－microdifferential Operator を定義することも出来るが, この小論では Symbol を用いて定義する。

<u>定義3</u> $T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ 上の層 $\mathscr{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ を次のように定める。
$\mathcal{U}\,(\subset T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}})$ を開集合として, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}})$ は次の条件を満たす symbol 列 $\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} P_{ij}(z, w, z^*, \theta)$ のことである。

(20) P_{ij} は (z^*, θ) について j 次斉次, z^* に関して i 次斉次

(21) $\forall K \subset\subset \mathcal{U}$ 及び $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists C_K > 0$ (Kにしかよらない。) $\exists C_{K,\varepsilon} > 0$ (ε, K による) が存在して, 次の評価を $\{P_{i,j}\}$ が満たす。

(i) $\forall i \geq 0\ \forall k \geq 0 \quad \sup_K |P_{i,i+k}| \leq C_{\varepsilon,K} \frac{\varepsilon^{i+k}}{i!\,k!}$

(ii) $\forall i \geq 0\ \forall k < 0 \quad \sup_K |P_{i,i+k}| \leq C_{\varepsilon,K}^{-k} \varepsilon^{i} \frac{(-k)!}{i!}$

(iii) $\forall i < 0\ \forall k \geq 0 \quad \sup_K |P_{i,i+k}| \leq C_{\varepsilon,K} \varepsilon^{k} C^{-i} (-i)!/k!$

(iv) $\forall i < 0, \forall k < 0 \quad \sup_K |P_{i,i+k}| \leq C_K^{-i-k} (-i)!\,(-k)!$

$\boxed{}$

以下 $\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ の性質を列挙する。

(Ⅰ) **積** $\quad P(z,D) = \sum_{i,j} P_{ij}(z,w,D_w,D_z)$

$$Q(z,D) = \sum_{k,l} Q_{k,l}(z,w,D_w,D_z)$$

に対して

$$R = PQ = \sum_{\lambda,\mu} R_{\lambda,\mu}. \quad \Sigma$$

$$R_{\lambda,\mu} := \sum_{\substack{\lambda = i+k-|\alpha| \\ \mu = j+l-|\alpha|-|\beta|}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} (\partial_{z^*}^{\alpha} \partial_{\theta}^{\beta} P_{ij})(\partial_z^{\alpha} \partial_w^{\beta} Q_{k,l}) \tag{22}$$

として定める時，$\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ は環の層となる。 $\boxed{}$

(Ⅱ) **有限階の作用素** $\quad P \in \mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ が $P \in \mathcal{E}^{2}_{\Lambda^c}[i_0,j_0]$ とは次の条件 (23), (24) を満たすことである。

(23) $\quad P_{ij} \equiv 0 \quad (j > j_0\ ;\ j = j_0$ かつ $i < i_0)$

(24) $\quad \forall j \in \mathbb{Z}$ に対して $\exists \lambda(j) \in \mathbb{Z}$ s.t.

$$P_{ij} \equiv 0 \quad (\text{for } i < \lambda(j))$$

更に

$$\mathcal{E}^{2}_{\Lambda^c} := \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{E}^{2}_{\Lambda^c}[i,j] \tag{25}$$

と定める時，$\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}$の環の層として部分層となる。$\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}$のsectionを有限階の2－microdifferential operatorと呼ぶ。

$\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}$のsub－Ringとして，次のものを構成する。

<u>定義4</u>　$r=\infty$，または$r>1$なる有理数として，

$P\in\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}$が$\mathcal{E}^{2,(r,1)}_{\Lambda^c}[i_0,j_0]$に属するとは$P=\sum_{i,j}P_{ij}$と展開する時，次の条件(26)を満たす時である。

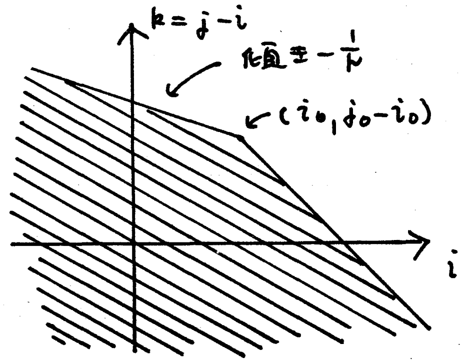
$$(26)\quad \{(i,j-i);P_{ij}\neq 0\}\subset\left\{(i,j-i);\ \begin{array}{l}\frac{1}{r}i+(j-i)\leqq\frac{1}{r}i_0+(j_0-i_0)\\ i+j-i\leqq i_0+(j_0-i_0)\end{array}\right\}$$

$$(27)\quad \mathcal{E}^{2,(r,1)}_{\Lambda^c}:=\bigcup_{i,j}\mathcal{E}^{2,(r,1)}_{\Lambda^c}[i,j]$$

として定める。　▨

$k=j-i$として(26)の右辺の集合は右下図である。

また$\mathcal{E}^{2,(r,1)}_{\Lambda^c}$は$\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}$のsub－Ringとなる。



(III) 有限階の作用素(続)

$P=\sum_{i,j}P_{ij}\in\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}$に対して$P$の主要表象$\sigma_{\Lambda^c}(P)$を以下の(28)により定める。

$$(28)\quad \sigma_{\Lambda^c}(P):=P_{i_1,j_1}\ \left(\text{但し}\ \begin{array}{l}j_1=\sup\{j\in\mathbb{Z};P_{ij}\neq 0\ (\exists i)\}\\ i_1=\inf\{i\in\mathbb{Z};P_{i,j_1}\}\end{array}\right.$$

更に P を $\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}[i_0,j_0]$ の section で $\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}[i_0,j_0]$ より小なる $\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}[i,j]$ に含まれない時

(29) $$\sigma^{(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P) = P_{i_0,j_0}$$

と定める。

2 − microdifferential operator の symbol Calculus で最も基本的なものは，次の定理である。

<u>定理 (Y. Laurent [3])</u> $U(\subset T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}})$ を開集合とする。P を $\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ の section とする時，

(30) P が U 上可逆 $\Leftrightarrow$ $\sigma_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P) \neq 0$ on U

更に，P を $\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ の section とする時，

(31) P が U 上 $\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ 中可逆 $\Leftrightarrow$ $\sigma^{(r,1)}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P) \neq 0$ on U ▨

例えば D_{z_1} は $\mathcal{E}_X|_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ 中 invertible ではないが，$\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ 中 $\{z_1^* \neq 0\}$ なる所において invertible となる訳である。

(IV) Microdifferential Operator・Microcharacteristics.

(32) $$\mathcal{E}^\infty_X|_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \hookrightarrow \mathcal{D}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}} := \mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}|_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$$

なる cannonical な埋め込みがある。但し，右辺において $\Lambda^{\mathbb{C}}$ を $T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}$ の 0 − section と同一視していることに注意する。

更に，この埋め込みを通して

(33) $$\mathcal{E}_X|_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}} := \mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}|_{\Lambda^{\mathbb{C}}}$$

なる同型が引き起こされる。symbol の level では，$\Lambda^{\mathbb{C}}$ に沿った Taylor 展開により記述される。

即ち，$P=\sum_j P_j(z,w,D_z,D_w)\in\mathcal{E}_X^\infty|_{\Lambda^\mathbb{C}}$ に対して，

$$(34)\quad P_j(z,w,\zeta,\theta)=\sum_\alpha P_j^{(\alpha)}(z,w,\theta)\zeta^\alpha$$

と $\Lambda^\mathbb{C}$ に沿って Taylor 展開する時

$$(35)\quad P_{ij}(z,w,z^*,\theta):=\sum_{|\alpha|=i} P_j^{(\alpha)}(z,w,\theta)z^{*\alpha}$$

と定める。この時

$$(36)\quad P=\sum_{i,j}P_{ij}\quad\in\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^\mathbb{C}}$$

と見做せば，上記の埋め込みは記述できる。

<u>定義 5</u>　$\mathcal{M}$ を coherent $\mathcal{E}_X|_{\Lambda^\mathbb{C}}$ module とする。この時 $\mathcal{M}$ の $\Lambda^\mathbb{C}$ に沿った microcharacteristic とは次に定める $ch^2_{\Lambda^\mathbb{C}}(\mathcal{M})$ のことである。

$$(37)\quad ch^2_{\Lambda^\mathbb{C}}(\mathcal{M}):=\operatorname{supp}\Big(\mathcal{E}^2_{\Lambda^\mathbb{C}}\underset{\pi^{-1}\mathcal{E}_X|_{\Lambda^\mathbb{C}}}{\otimes}\pi^{-1}\mathcal{M}\Big)$$

但し，ここで π は

$$T^*_{\Lambda^\mathbb{C}}\widetilde{\Lambda^\mathbb{C}}\xrightarrow{\ \pi\ }\Lambda^\mathbb{C}$$

なる projection とする。同様に，

$$(38)\quad ch^{2\,(r,1)}_{\Lambda^\mathbb{C}}(\mathcal{M}):=\operatorname{supp}\Big(\mathcal{E}^{2,(r,1)}_{\Lambda^\mathbb{C}}\underset{\pi^{-1}\mathcal{E}_X|_{\Lambda^\mathbb{C}}}{\otimes}\pi^{-1}\mathcal{M}\Big)$$

とする。これを type $(r,1)$ の microcharacteristic と呼ぶ。▨

以上が以下の小論に必要な柏原－Y. Laurent [2], Y. Laurent [3] の準備である。

§2 Propagation of 2-microlocal singularities.

§1の準備のもと方程式(1)を考察する。即ち，

(1) $\quad \mathcal{P}u := (D_1D_2 + R(x, D_x))\,u = 0$

の $\quad \Lambda = \{(x, \sqrt{-1}\xi\, dx) \in \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n ;\ \xi_1 = \xi_2 = 0\}$

上のmicro函数解の構造を考察する。

$\xi' = (\xi_3, \cdots, \xi_n)$，$x' = (x_3, \cdots, x_n)$ と定めて，$T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の

座標を $(x; \sqrt{-1}\xi' dx'; \sqrt{-1}(x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2))$ と定める。この時，

(39) $\quad ch^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(\mathcal{P}) \cap \mathring{T}^*_\Lambda \tilde{\Lambda} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$

但し，

(40) $\quad \Sigma_1 = \{(x, \sqrt{-1}\xi' dx', \sqrt{-1}(x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2));\ x_1^* = 0\}$

(41) $\quad \Sigma_2 = \{(x, \sqrt{-1}\xi' dx', \sqrt{-1}(x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2));\ x_2^* = 0\}$

であることに注意する。

(1)を $\mathring{p} = (0, \sqrt{-1}dx_3)$ の近傍で考える。(1)を2-microlocalに考える。

$\mathring{p}_1 = (0, \sqrt{-1}dx_3; \sqrt{-1}dx_2) (\in \Sigma_1)$ の近傍では，(1)は

(42) $\quad (D_1 + R_1(x, D))\,u = 0.$

と，$\mathring{p}_2 = (0, \sqrt{-1}dx_3, \sqrt{-1}dx_1)\ (\in \Sigma_2)$ の近傍では，(1)は

(43) $\quad (D_2 + R_2(x, D))\,u = 0$

とequivalentであることが分る。但し，$R_1(x, D) = D_2^{-1}R(x, D)$，

$R_2(x, D) = D_1^{-1}R(x, D)$ とする。更に次の定理2が成立する。

定理2 (A) $\overset{\circ}{p}_1$ の近傍に $Q_1(x,D)\in\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ で $\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ 中 invertible なものが存在して

(44) $$Q_1(D_1+R_2(x,D_x))\,Q_1^{-1} = D_1$$

が成立する。従って

(45) $$\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}\big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}(D_1+R_1(x,D)) \simeq \mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}\big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}D_1$$

が成立する。

(B) $\overset{\circ}{p}_2$ の近傍に $Q_2(x,D_x)\in\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ で $\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ 中 invertible なものが存在して

(46) $$Q_2\,(D_2+R_2(x,D_x))\,Q_2^{-1} = D_2$$

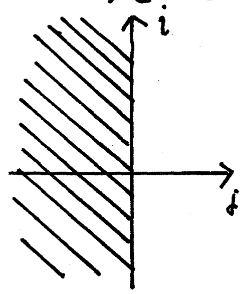
が成立する。従って，

(47) $$\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}\big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}(D_2+R_2(x,D_x)) \simeq \mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}\big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}D_2$$

が成立する。 ▨

証明は S−K−K[ ]の第2章定理5.2.1.と同様に行なう。上の Q_1, Q_2 について， $Q_\ell=\sum Q^{(\ell)}_{ij}$ $(\ell=1,2)$ として

(48) $$\{(j,i)\,;\ Q^{(\ell)}_{ij}\neq 0\}\quad(\ell=1,2)$$



は右図に含まれる。本質的には有限階で収まっている。更に，(1)における $R(x,D)$ に対して，Levi条件を課せば，有限階の作用素の範囲で話が収まる。

定理3 もし(1)の $R(x,D)=\sum_{ij}R_{ij}$ において，

(49) $$R_{0,1}(x,D)\equiv 0$$

が成立するとする。この時,

(A) $\mathring{p}_1$ の近傍に $Q_1 \in \mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c}$ で $\mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c}$ 中 invertible なものが存在して (44) を満たす。従って

$$(50) \qquad \mathcal{E}^{2,(\infty,1)}_{\Lambda^c} / \mathcal{E}^{2,(\infty,1)}_{\Lambda^c}(D_1 + R_1(x, D_x)) \simeq \mathcal{E}^{2,(\infty,1)}_{\Lambda^c} / \mathcal{E}^{2,(\infty,1)}_{\Lambda^c} D_1$$

が成立する。

(B) $\mathring{p}_2$ の近傍に $Q_2 \in \mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c}$ で $\mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c}$ 中 invertible なものが存在して (46) を満たす。よって,

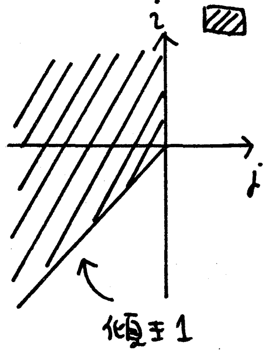
$$(51) \qquad \mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c} / \mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c}(D_2 + R_2(x, D)) \simeq \mathcal{E}^{2(\infty,1)}_{\Lambda^c} / \mathcal{E}^{2,(\infty,1)}_{\Lambda^c} D_2$$

なる同型が存在する。

上の Q_1, Q_2 について $Q_\ell = \sum_{ij} Q^{(\ell)}_{ij}$ として

$$(52) \qquad \{(j,i)\ ;\ Q^{(\ell)}_{ij} \neq 0\} \quad (\ell = 1, 2)$$

は右図の斜線部に含まれる。



定理2及び2-microfunctionに対する de-Rham の定理を用いて次の定理4を得る。

<u>定理4</u> (A) $\mathring{p}_1 = (0, \sqrt{-1}dx_3, \sqrt{-1}dx_2) \in \Sigma_1$ の近傍で定義された $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の section で (1) を満たすものを考える。その時, supp u は $\{x_1^* = 0\}$ の micro-bicharacteristic 部分,

$$(53) \qquad \left\{ (x_1, x_2, x'; \sqrt{-1}\xi' dx'; \sqrt{-1}(x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2))\ ;\ \begin{array}{l} \xi' = \text{const},\ x' = \text{const} \\ x_2 = \text{const},\ x_2^* = \text{const},\ x_1^* = 0 \end{array} \right\}$$

の union である。

(B) $\mathring{p}_2 = (0; \sqrt{-1}dx_3, \sqrt{-1}dx_2) \in \Sigma_2$ の近傍で定義された $\mathcal{C}^2_\Lambda$ の section u で(1)を満たすとする。この時，$\mathrm{supp}\, u$ は $\{x_2^* = 0\}$ の micro-bicharacteristic 即ち

$$(54)\ \left\{ (x, \sqrt{-1}\xi' dx'; \sqrt{-1}(x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2);\ \begin{array}{l} x' = \mathrm{const},\ \xi' = \mathrm{const},\ x_1 = \mathrm{const} \\ x_1^* = \mathrm{const},\ x_2^* = 0 \end{array} \right\}$$

の union である。▨

この定理4と2－micro 函数における Foundamental exact sequence (17)，(18) を用いる時，Introduction に揭げた定理1を得る。即ち，$\bigcup_{t_1 \in T_1} b_{t_1}^{(1)}$ 及び $\bigcup_{t_2 \in T_2} b_{t_2}^{(2)}$ は 2－microlocal singularities を projection $\pi : \mathring{T}^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \longrightarrow \Lambda$ で Λ に落としたものであり，その他の2次元的な microlocal singularity は正則パラメーターの一意接続性を通じて現われる。

§3 Multiplicity の高い場合への拡張

この節では定理2を Multiplicity の高い場合に拡張する。但し，柏原－大島 [4] の意味で $\Lambda^{\mathbb{C}}$ に沿って Regular Singularity を持つ場合を扱う。即ち次の方程式 (55) を $(0, \sqrt{-1}dx_3) \in \mathring{T}^*\mathbb{R}^n$ の近傍で考え，(56) (57) の仮定を置く。

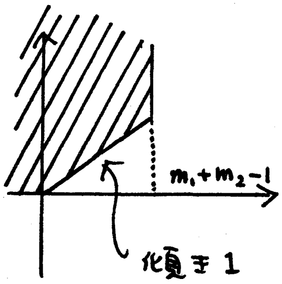
$$(55)\quad Pu := (D_1^{m_1} D_2^{m_2} + R(x, D_x))u = 0$$

但し，次の条件 (56)，(57) を課す。

$$(56)\quad \mathrm{ord}\, R(x, D_x) \leqslant m_1 + m_2 - 1.$$

(57) $R(x,D)=\sum_{i,j} R_{ij}(x,D)$ として

$\{(j,i)\,;\,R_{ij}\neq 0\}$ は右上の斜線部に入る。



この時次の定理5を得る。

定理5 (A) $\mathring{p}_1=(0,\sqrt{-1}\,dx_3,\sqrt{-1}\,dx_2)$ の近傍で

(58) $$\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\Big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}P \simeq \left(\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\Big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}D_1\right)^{m_1}$$

(B) $\mathring{p}_2=(0,\sqrt{-1}\,dx_3,\sqrt{-1}\,dx_1)$ の近傍で

(59) $$\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\Big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}P \simeq \left(\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\Big/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}D_2\right)^{m_2}$$

なる同型が存在する。 ▨

この定理5を用いて，方程式(55)の $\Lambda=\{\xi_1=\xi_2=0\}$ 上のmicro函数解の構造が分る。

§4 複素領域での議論とその応用

この§では以下のNotationに従う。

$X=\mathbb{C}^{n_0}\times\mathbb{C}^{n_1}$ $\quad (n_0\geq 2)$

$\Lambda=\{(z,w,\zeta dz+\theta dw)\in \mathring{T}^*X\,;\,\zeta=0\}$

次のmicrodifferential equationを $\mathring{p}=(0,dw_1)$ の近傍で考える。

(60) $$Pu=(D_{z_1}D_{z_2}+R(x,D))u=0$$

但し，

(61) $$\mathrm{ord}\ R(x,D)\leq 1$$

とする。複素領域においても定理2は成立する。即ち，
$\mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$ の座標を $(z, w; \theta dw; z^* dz)$ として，P の Λ に沿った microcharacteristic は

(62) $\quad ch^2_\Lambda(P) = \{(z, w, \theta, z^*);\ z_1^* = 0 \ \text{or}\ z_2^* = 0\}$

であることに注意する。

<u>定理6</u> (A) $(0, dw_1, dz_2) \in \mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$ の近傍に

(63) $\quad \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda P \simeq \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda D_1$

(B) $(0, \sqrt{-1}\,dw_1, \sqrt{-1}\,dz_1) \in \mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$ の近傍に

(64) $\quad \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda P \simeq \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda D_2$

なる同型が成立する。 $\blacksquare$

この定理6を用いて次の命題1，2を得る。まず，次の(65)を $\mathring{p} = (0, \sqrt{-1}\,dx_3) \in \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^n$

(65) $\quad Pu = \{D_1(D_1 + \sqrt{-1}\,D_2) + R(x, D)\}u = 0$

但し，

(66) $\quad \mathrm{ord}\ R(x, D_x) \leqq 1$

と仮定する。microlocal に問題とするのは

(67) $\quad \Lambda = \{(x, \sqrt{-1}\,\xi dx) \in \mathring{T}^*\mathbb{R}^n;\ \xi_1 = \xi_2 = 0\}$

上の micro ~~ds~~ 函数解の構造である。従って，我々は(67)に沿って 2-microlocalize する。すると，$(D_1 + \sqrt{-1}\,D_2)^{-1}$ が $\mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda} \longrightarrow \Lambda$ の fibre 全てで存在することに注意すれば，

$$(68)\quad ch^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P)\cap \mathring{T}^*_{\Lambda}\tilde{\Lambda}=\{(x,\sqrt{-1}\xi'dx',\sqrt{-1}(x_2^*dx_2+x_1^*dx_1);\ x_1^*=0\}$$

であることが分る。

$\mathring{q}_1=(0,\sqrt{-1}dx_3;\sqrt{-1}dx_2)\in ch^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(P)$ の近傍で定理6を用いる時,

$$(69)\quad \mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}P \;\simeq\; \mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}/\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}D_1$$

が成立する。

Λ の bicharacteristic で $\mathring{p}$ を通るものを Σ とする。この時,以上の考察により,

<u>命題1</u>　u を $\mathring{p}$ の近傍で定義された $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}|_{\Sigma}$ の section で (65) を満たすとする。この時,Σ 上の ∂x_1 の積分曲線の族 $\{b^{(1)}_{t_1}\}_{t_1\in T_1}$ が存在して,

$\mathrm{supp}\, u$ は $\Sigma\setminus \bigcup_{t_1\in T_1} b^{(1)}_{t_1}$ の連結成分のいくつか及び $\bigcup_{t_1\in T_1} b^{(1)}_{t_1}$ の union となる。▨

次に,以下の microdifferential eq. を $\mathring{p}=(0,\sqrt{-1}dx_4)$ の近傍で考える。

$$(70)\quad \big(D_1(D_2+\sqrt{-1}D_3)+R(x,D_x)\big)u=0$$

但し,

$$(71)\quad \mathrm{ord}\ R(x,D_x)\leq 1$$

と仮定する。(65) と同様に問題となるのは

$$(72)\quad \Lambda=\{(x,\sqrt{-1}\xi dx)\in\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n;\ \xi_1=\xi_2=\xi_3=0\}$$

の近傍の micro 函数解の構造である。Λ に沿って P を超局所化して考える。

$x'=(x_3,\cdots,x_n)$, $\xi'=(\xi_3,\cdots,\xi_n)$ として,

(73) $$\Sigma_1 = \{(x;\sqrt{-1}\xi' dx';\sqrt{-1}(x_1^* dx_1 + x_2^* dx_2 + x_3^* dx_3)) \in \mathring{T}^*_{\Lambda}\tilde{\Lambda};\ x_1^*=0\}$$

(74) $$\Sigma_2 = \{(x;\sqrt{-1}\xi' dx';\sqrt{-1}(\qquad = \qquad));\ x_2^* = x_3^* = 0\}$$

と定める時,(70)が意味を持つ限り (70)は2-microlocal には,

(75) Σ_1 上　　　　$D_1 u = 0$

(75) Σ_2 上　　　　$(D_2+\sqrt{-1}D_3)u=0$

と $\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda^c}$ 中同値であることが分る. 以上の注意と正則パラメーター付の2-micro 函数の正則パラメーターに関する接続の一意性により次の命題3を得る. 但し, ΣをΛのpを通る陪特性帯とする。

命題2　uをpの近傍で定義された $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}|_{\Sigma}$ の sectionで(70)を満たすとする。この時, Σ上の∂_{x_1}の積分曲線の族 $\{b^{(1)}_{t_1}\}_{t_1\in T_1}$ と Σ上の$(\partial_{x_2},\partial_{x_3})$の積分多様体の族 $\{b^{(2)}_{t_2}\}_{t_2\in T_2}$ が存在して, supp uは $\Sigma\setminus\left(\bigcup_{t_1} b^{(1)}_{t_1}\cup\bigcup_{t_2} b^{(2)}_{t_2}\right)$ の連結成分のいくつかと $\bigcup_{t_1} b^{(1)}_{t_1}$ と $\bigcup_{t_2} b^{(2)}_{t_2}$ の union となる。 ▨

§5 最後に

[注意.2] (1) 及び (55) に量子化接触変換でもって変換されるclassについては, A. Grigis — R. Lascar [6] を見られたい。

方程式(70)に変換されるクラスも自然な条件を課して定める事が可能と思われるが, まだ分らない。▨

以上の議論については詳細については私の修士論文[7]を見られたい。 (以上)

文献

1. 柏原－河合：Second Microlocalization and Asymptotic Expansions, Lecture Note in Physics NO. 126, pp 21－76

2. 柏原－Y. Laurent：Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalization, Prepublication d'Orsay.

3. Y. Laurent：Théorie de la deuxième microlocalization dans le domaine complexe：opérateur 2－microdifferentiels, Thesis presented to Université Paris Sud, Centre d'Orsay.

4. 柏原－大島：Systems of Microdifferential Equations with Regular Singularities and their Boundary Value Problems, Acta Math, 106, pp 145－200

5. 佐藤－柏原－河合：Hyperfunctions and Pseudodifferen Equations, Lecture Note in Math. No. 287, 1973.

6. A. Grigis－R. Lascar：Équations locales d'un système de sous-variétés involutives. C.R. Acad. Sc. Paris, t 287 série A p.p. 503～506.

7. 戸瀬：修士論文（1985年1月提出予定）